DEVOIR (20PT)
MAT2250–THÉORIE DES GROUPES
AUTOMNE, UQAM
À REMETTRE LE 4 DÉCEMBRE 2017

VEUILLEZ LIRE ATTENTIVEMENT CE QUI SUIT :

- **Consignes :**
  - Ce devoir, de 5 pages au maximum (sans compter la page de présentation obligatoire), devra être rédigé[1] sur du papier format lettre ligné et broché.
  - ATTENTION à ne pas plagier la copie de ceux avec qui vous rechercheriez la solution de ce problème ou des textes lus. Voir le règlement sur le PLAGIAT à l'UQAM à la fin du plan de cours
  - **AUCUN DEVOIR DE LA QUALITÉ D'UN BROUILLON NE SERA ACCEPTÉ.**

- **Critères d'évaluations des devoirs :** Respect des consignes; Clarté de la rédaction, de la présentation et exactitude du raisonnement amenant à la solution (comprend l'exactitude des calculs); Qualité du français (ou anglais) écrit, bon usage du langage et des symboles mathématiques.

- **Échéance :** À remettre en version papier au plus tard le 4 décembre 2017 à 9h en classe. *Chaque jour de retard entraîne une pénalité de 10%. Par exemple, une journée de retard sur un devoir noté sur 20 équivaut à un retrait de 2 points de la note finale du devoir.*

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{Q}^*$, on pose $f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ l'application définie par
$$f_a(x) = ax.$$
(1) Montrer que f_a est un automorphisme du *groupe additif* $\mathbb{Q}$.
(2) Montrer que l'application suivante est un isomorphisme de groupes :
$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{Q}^* & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}) \\ a & \longmapsto & f_a \end{array}$$

Exercice 2. Soit G un groupe d'ordre 143 et E un G-ensemble d'ordre 108. Montrer que l'action de G sur E n'est pas transitive.

Exercice 3. Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre $|G| = p^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $H \lhd G$ non réduit à l'élément neutre e de G, montrer que $|Z(G) \cap H| = p^k$, où $1 \leq k \leq n$. En déduire que $Z(G)$ n'est pas réduit à l'élément neutre.

Exercice 4. Montrer que $S_n \simeq A_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 3$.

[1] Vous pouvez aussi rédiger ce devoir sous LaTEX (voir détails sur la page internet du cours) ou sous tout autre traitement de texte, et l'imprimer sur feuille blanche avec des caractères de taille 12pt, des marges d'au moins 1,5cm de tous les cotés et en format 1.5 interlignes

Exercice 5. Soit G un groupe dont l'élément neutre est noté e. On note $Z(G)$ le centre de G. Le *commutateur de* $x, y \in G$, noté $[x, y]$ est l'élément de G défini par $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Le *groupe dérivé* de G est le sous-groupe $[G, G]$ de G engendré par les commutateurs de G :

$$[G, G] = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle.$$

(a) Montrer que G est abélien si et seulement si $[G, G] = \{e\}$.
(b) Montrer que $[G, G] \lhd G$.
(c) Soit $H \lhd G$ tel que $H \cap [G, G] = \{e\}$, montrer que $H \subseteq Z(G)$.
(d) Soit $H \lhd G$, montrer que G/H est abélien si et seulement si $[G, G] \subseteq H$.

(Christophe Hohlweg) PK-4230
E-mail address: hohlweg.christophe@uqam.ca