DEVOIR (20PT)
MAT3250–ALGÈBRE LINÉAIRE III
AUTOMNE 2017, UQAM
À REMETTRE LE 29 NOVEMBRE 2017

VEUILLEZ LIRE ATTENTIVEMENT CE QUI SUIT :

- **Consignes :**
  - Ce devoir, de 6 pages au maximum (sans compter la page de présentation obligatoire), devra être rédigé[1] sur du papier format lettre ligné et broché.
  - ATTENTION à ne pas plagier la copie de ceux avec qui vous rechercheriez la solution de ce problème ou des textes lus. Voir le règlement sur le PLAGIAT à l'UQAM à la fin du plan de cours
  - **AUCUN DEVOIR DE LA QUALITÉ D'UN BROUILLON NE SERA ACCEPTÉ.**

• **Critères d'évaluations des devoirs :** Respect des consignes; Clarté de la rédaction, de la présentation et exactitude du raisonnement amenant à la solution (comprend l'exactitude des calculs); Qualité du français (ou anglais) écrit, bon usage du langage et des symboles mathématiques.

• **Échéance :** À remettre en version papier au plus tard le 29 novembre 2017 en classe. *Chaque jour de retard entraîne une pénalité de 10%. Par exemple, une journée de retard sur un devoir noté sur 20 équivaut à un retrait de 2 points de la note finale du devoir.*

Tout au long de ce devoir $\Bbbk$ désigne un corps de caractéristique différente de 2. Ce devoir contient deux points bonus!

Exercice 1 (16pt). Soit B une forme bilinéaire symétrique non nulle sur un $\Bbbk$-espace vectoriel E, c'est à dire $B(u,v) = B(v,u)$ pour tout $u, v \in E$. Pour $A \subseteq E$ non vide, on définit le sous-espace vectoriel de E suivant :

$$A^\perp = \{u \in E \mid B(u,v) = 0, \forall v \in A\}.$$

Le *radical de* B est $E^\perp$. On dit que B est non-dégénérée si $E^\perp = \{0\}$. On note :

$$Q = \{u \in E \mid B(u,u) = 0\}.$$

Partie A (3+2+2=7pt) On note $B(u,\cdot)$ la forme linéaire sur E définie par $v \mapsto B(u,v)$. On considère l'application $\tilde{B} : E \to E^*$ définie par $\tilde{B}(u) = B(u,\cdot)$ pour tout $u \in E$.

(a) Montrer que : $\tilde{B} \in L_\Bbbk(E,E^*)$, $\ker \tilde{B} = E^\perp$ et $\operatorname{Im} \tilde{B} \subseteq (E^\perp)^\circ$. En déduire que $\operatorname{Im} \tilde{B} = (E^\perp)^\circ$ si $\dim E$ est finie.

(b) Montrer que le quotient $E/E^\perp$ est isomorphe à un sous-espace-vectoriel de $(E^\perp)^\circ$. Si la dimension est de E est finie, en déduire que $E/E^\perp$ est isomorphe à $(E^\perp)^\circ$.

---

[1] Vous pouvez aussi rédiger ce devoir sous LaTEX (voir détails sur la page internet du cours) ou sous tout autre traitement de texte, et l'imprimer sur feuille blanche avec des caractères de taille 12pt, des marges d'au moins 1,5cm de tous les cotés et en format 1.5 interlignes

(c) Montrer que, si B est non-dégénérée et si la dimension de E est finie, alors $\tilde{B}$ est un isomorphisme (naturelle) entre E et son dual E^*. En déduire qu'alors $\tilde{B}(A^\perp) = A^\circ$ pour tout $A \subseteq E$ non vide.

Partie B (2+2+2+2+1=9pt) Soit $\alpha \in E \setminus Q$, on considère l'application suivante sur E :

$$\begin{array}{rcl} s_\alpha : E & \longrightarrow & E \\ u & \mapsto & u - 2\dfrac{B(u,\alpha)}{B(\alpha,\alpha)}\alpha. \end{array}$$

(a) Montrer que $\alpha^\perp$ est un hyperplan de E et que $E = \alpha^\perp \oplus \Bbbk\alpha$.
(b) Montrer que $s_\alpha \in \mathrm{GL}(E)$, que $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ et que l'ensemble des points fixes de s_α est $\alpha^\perp$. En déduire que s_α est la réflexion par rapport à $\alpha^\perp$ et parallèlement à la droite $\Bbbk\alpha$.
(c) Montrer que si $E^\perp$ est un hyperplan de E, alors $\alpha^\perp = \beta^\perp$ pour tout $\beta \in E \setminus E^\perp$. En déduire qu'il existe $\beta \in E \setminus Q$ tel que $s_\alpha \neq s_\beta$ mais que leurs ensembles de points fixes sont égaux.
(d) Montrer que l'ensemble des points fixes de ${}^t s_\alpha$ est α°. Montrer que ${}^t s_\alpha = {}^t s_\beta$ si et seulement si $\alpha^\circ = \beta^\circ$.
(e) En déduire que si E est de dimension finie et B est non-dégénérée, alors $s_\alpha = s_\beta$ si et seulement si $\alpha^\perp = \beta^\perp$ pour tout $\alpha, \beta \in E \setminus Q$.

Exercice 2 (1+3+2=6pt). Soit un E un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et F un $\Bbbk$-espace vectoriel quelconque. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{A}_p(E;F)$ le $\Bbbk$-espace vectoriel des applications p-linéaires alternées de E^p dans F. On considère $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_p)$ est un système de p vecteurs, on notera pour $1 \leq j \leq p$,

$$u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i,$$

où les $a_{ij} \in \Bbbk$ sont les coordonnées de u_j. On note $\det_{\mathcal{B}}$ le déterminant relativement à la base $\mathcal{B}$: $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \det A$, où $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Pour $I, J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ avec $|I| = |J|$, on note $\Delta^{\mathbf{u}}_{I,J} = \det(a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$, le déterminant du mineur de la matrice A relativement à I et J.

(a) Montrer que $\dim \mathcal{A}_p(E;F) = 0$ si $p > n$.
(b) Soit $f \in \mathcal{A}_p(E,F)$ pour $1 \leq p \leq n$. On considère l'ensemble

$$\Gamma_p = \{\{i_1, \ldots, i_p\} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\}.$$

Montrer que pour tout $\mathbf{u}$ un système de p vecteurs de E on a :

$$f(\mathbf{u}) = \sum_{\{i_1,\ldots,i_p\} \in \Gamma_p} \Delta^{\mathbf{u}}_{\{i_1,\ldots,i_p\},\{1,\ldots,p\}} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}).$$

(c) Supposons $p \leq n$, en déduire que $\mathcal{A}_p(E,F)$ est isomorphe à $F^{\binom{n}{p}}$ en tant que $\Bbbk$-espaces vectoriels.

(Christophe Hohlweg) PK-4230
E-mail address: `hohlweg.christophe@uqam.ca`