EXAMEN A (20PT)
MAT2250–THÉORIE DES GROUPES
AUTOMNE, UQAM
LE 13 OCTOBRE 2017 DE 9H À 10H30

VEUILLEZ LIRE ATTENTIVEMENT CE QUI SUIT :

• **Consignes :** Vous n'avez le droit à aucun **document** (notes de cours, livres, etc.) ou **appareil** ÉLECTRONIQUE (ordinateur et assimilé, téléphone, calculatrice, tablettes etc.);

• **Critères d'évaluations :** Respect des consignes ; Clarté de la rédaction, de la présentation et exactitude du raisonnement amenant à la solution (comprend l'exactitude des calculs) ; Qualité du français écrit, bon usage du langage et des symboles mathématiques.

Justifier bien toutes vos réponses à partir du matériel vu en cours.

Exercice 1 (5pt). Soit G un groupe tel que tout élément de G est une involution, c'est-à-dire, $g^2 = e$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est abélien.

Exercice 2 (5pt). Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes de G. On suppose qu'il existe $a, b \in G$ tel que :

$$aH = \{ah \mid h \in H\} \subseteq \{bk \mid k \in K\} = bK.$$

Montrer que $H \leq K$.

Exercice 3 (2+4+4=10pt). Soit G un groupe et H un sous-ensemble fini de G de cardinal $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose que H est stable pour la loi de composition interne de G, c'est-à-dire, $xy \in H$ pour tout $x, y \in H$.

(a) Soit $x \in H$, montrer que $x^n \in H$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(b) Soit $x \in H$, montrer qu'il existe un entier $1 \leq n \leq m$ tel que $x^n = e$.
(c) Montrer que H est un sous-groupe de G.

(Christophe Hohlweg) PK-4230
E-mail address: hohlweg.christophe@uqam.ca