EXAMEN B (20PT)
MAT2250–THÉORIE DES GROUPES
AUTOMNE 2017, UQAM
LE 10 NOVEMBRE 2017 DE 9H À 9H45

VEUILLEZ LIRE ATTENTIVEMENT CE QUI SUIT :

• **Consignes :** Vous n'avez le droit à aucun **document** (notes de cours, livres, etc.) ou **appareil** ÉLECTRONIQUE (ordinateur et assimilé, téléphone, calculatrice, tablettes etc.);

• **Critères d'évaluations :** Respect des consignes ; Clarté de la rédaction, de la présentation et exactitude du raisonnement amenant à la solution (comprend l'exactitude des calculs) ; Qualité du français écrit, bon usage du langage et des symboles mathématiques.

Justifier bien toutes vos réponses à partir du matériel vu en cours.

Exercice 1 (3+3+3=9pt). Soit $\varphi : G \to G'$ et $\psi : G' \to G$ deux morphismes de groupes tel que $\psi \circ \varphi = \mathbf{Id}_G$. Montrer que ψ est surjective, que φ est injective et que $\ker(\psi) = \ker(\varphi \circ \psi)$.

Exercice 2 (2+3+3+3=11pt).

(a) Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. On suppose que $H = \langle S \rangle$, où $S \subseteq G$ non vide. Montrer que H est normal dans G si et seulement si $gsg^{-1} \in H$ pour tout $s \in S$ et tout $g \in G$.

(b) Le groupe diédral $\mathcal{D}_6$ est engendré par la rotation r d'ordre 6 et la réflexion s d'ordre 2. Soit $H = \langle r^2, s \rangle$ et $K = \langle r^3 \rangle$.
  (i) Montrer que H et K sont des sous-groupes normaux de $\mathcal{D}_6$.
  (ii) Montrer que $H = \mathcal{D}_3$ et $K \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
  (iii) Montrer que $\mathcal{D}_6 \simeq \mathcal{D}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(Christophe Hohlweg) PK-4230
E-mail address: hohlweg.christophe@uqam.ca