EXAMEN B (20PT)
MAT3250–ALGÈBRE LINÉAIRE III
AUTOMNE 2017, UQAM
LE 15 NOVEMBRE 2017 DE 14H À 15H30

VEUILLEZ LIRE ATTENTIVEMENT CE QUI SUIT :

• **Consignes :** Vous n'avez le droit à aucun **document** (notes de cours, livres, etc.) ou **appareil** ÉLECTRONIQUE (ordinateur et assimilé, téléphone, calculatrice, tablettes etc.);

• **Critères d'évaluations :** Respect des consignes ; Clarté de la rédaction, de la présentation et exactitude du raisonnement amenant à la solution (comprend l'exactitude des calculs) ; Qualité du français écrit, bon usage du langage et des symboles mathématiques.

Justifier bien toutes vos réponses à partir du matériel vu en cours.

Tout au long de cet examen, $\Bbbk$ désigne un corps.

Exercice 1 (3pt). Soit E un $\Bbbk$-espace vectoriel, H un sous-espace vectoriel de E et K un supplémentaire de H dans E. On considère la projection canonique $p_H : E \twoheadrightarrow H$ de E sur H parallèlement à K et l'injection canonique ${}^t p_H : H^* \hookrightarrow E^*$. Montrer que $\mathrm{Im}({}^t p_H) = K^\circ$.

Exercice 2 (3+4+4=11pt). Soit E et F deux $\Bbbk$-espaces vectoriels.

(a) Soit $f \in E^*$ et $g \in F^*$, montrer que l'application $f \times g : E \times F \to \Bbbk$ définie par $(f \times g)(u, v) = f(u) + g(v)$ est linéaire.
(b) Montrer que l'application $\Theta : E^* \times F^* \to (E \times F)^*$ définie par $\Theta((f, g)) = f \times g$ est linéaire.
(c) En déduire que $E^* \times F^* \simeq (E \times F)^*$.

Exercice 2 (4+2=6pt). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \Bbbk$ et $E = \Bbbk_n[X]$. On note $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E et $\mathcal{B}^*$ sa base duale. Soit $\Lambda = (f_0, \ldots, f_n)$ la famille de vecteurs de E^* définie par $f_i(P) = P(a_i)$ pour tout $0 \leq i \leq n$.

(a) Montrer que Λ est une base de E^* si et seulement si $a_i \neq a_j$ pour tout $0 \leq i \neq j \leq n$.
(b) Dans le cas où Λ est une base de E^*, on note $\mathcal{C}$ la base de E dont Λ est la base duale. Donner la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

(Christophe Hohlweg) PK-4230
E-mail address: `hohlweg.christophe@uqam.ca`