FEUILLE D'EXERCICES 2, MAT3250–ALGÈBRE LINÉAIRE III AUTOMNE, UQAM

Tout au cours de cette feuille d'exercice $\Bbbk$ est un corps.

Exercice 1. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions infiniment dérivables à valeurs réelles et u l'application qui à chaque $f \in E$ associe $u(f)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ comme suit : $u(f)(x) = f'(x) - x.f(x)$. Montrer que $u \in \mathrm{End}(E)$, déterminer $\ker u$ et calculer u^2. Calculer $u(g)$ pour $g \in E$ définie par $g(x) = (1+x)e^{x^2/2}$ et en déduire les solution de l'équation différentielle $y'' - (1+x^2)y = 0$.

Exercice 2. Soit E un $\Bbbk$-espace vectoriel et $f_1, \dots, f_n \in \mathrm{End}(E)$ tel que :

$$Id_E = f_1 + \cdots + f_n \text{ et } f_i \circ f_j = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^n f_i(E)$.

Exercice 3. Soit E un $\Bbbk$- espace vectoriel et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espace vectoriels de E tel que $E = F_1 + \cdots + F_n$. Montrer qu'il existe $G_1 \subseteq F_1, \dots, G_n \subseteq F_n$ des sous-espaces vectoriels de E tel que $E = \bigoplus_{i=1}^n G_i$.

Exercice 4. On considère $E = \Bbbk^4$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par $u = (1,1,0,0)$ et $v = (1,0,0,-1)$. Déterminer deux sous-espaces supplémentaires de F dans E et donner une base de E/F.

Exercice 5. Soit E un $\Bbbk$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

(i) Supposons que $G \subseteq F$. Montrer que F/G est un sous-espace vectoriel du $\Bbbk$-espace vectoriel E/G. Montrer que les $\Bbbk$-espaces vectoriels E/F et $(E/G)/(F/G)$ sont isomorphes.

(ii) Montrer que les $\Bbbk$-espaces vectoriels $F/(F \cap G)$ et $(F+G)/G$ sont isomorphes.

(Christophe Hohlweg) PK-4230
E-mail address: `hohlweg.christophe@uqam.ca`