FEUILLE D'EXERCICES 3,
MAT3250–ALGÈBRE LINÉAIRE III
AUTOMNE, UQAM

Tout au cours de cette feuille d'exercice $\Bbbk$ est un corps.

Exercice 1. Soit V un $\Bbbk$-espace vectoriel et $E = L_{\Bbbk}(\Bbbk, V)$. Montrer que la fonction $\varphi : E \to V$ définie par $\varphi(f) = f(1)$ est un isomorphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels.

Exercice 2. Soit H un hyperplan d'un $\Bbbk$-espace vectoriel E, i.e., la codimension de H dans E est 1. On note $H = \ker\varphi$ pour $\varphi \in E^*$ non nul. Montrer que si $\psi \in E^*$ tel que $H = \ker\psi$ alors il existe un scalaire $\alpha \in \Bbbk^*$ tel que $\psi = \alpha\varphi$. En déduire une bijection naturelle entre les hyperplans de E et les droites de E^*.

Exercice 3. Classifier les isomorphismes de $\Bbbk^*$ dans $\Bbbk$ en tant que $\Bbbk$-espaces vectoriels.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \Bbbk$ deux à deux distincts. Soit $f_0, \dots, f_n$ des formes linéaires sur $E = \Bbbk_n[X]$ définies par $f_i(P) = P(a_i)$.

(a) Montrer que la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est une base de E^* et déterminer une base $\mathcal{B}$ de E dont $(f_0, \dots, f_n)$ est sa base duale.

(b) Supposons $\Bbbk = \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique vecteur $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\forall P \in E,\ \int_0^1 P(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(a_k).$$

Exercice 5. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs dans un $\Bbbk$-espace vectoriel E. Supposons que: $\forall i \in I,\ \forall f \in E^*,\ f(e_i) = 0 \implies f = 0$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E. Si $\dim E = |I|$ est fini, montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

Exercice 6. Soit E, F deux $\Bbbk$-espaces vectoriels, montrer que $(E \times F)^*$ et $E^* \times F^*$ sont isomorphes.

Exercice 7. On considère I un ensemble infini et $E = \Bbbk^{(I)}$ le $\Bbbk$-espace vectoriel des fonctions de I dans $\Bbbk$ à support fini.

(a) Déterminer une base de E. Montrer que E^* est isomorphe à $F = \Bbbk^I$, le $\Bbbk$-espace vectoriel des fonctions de I dans $\Bbbk$.

(b) Soit $i : E \to E^{**}$ l'application linéaire injective définie par $i(u)(\varphi) = \varphi(u)$ pour tout $\varphi \in E^*$. Identifiant E^* et F, montrer qu'il existe $f \in E^{**}$ tel que $E \subseteq \ker f$ et montrer que $f \notin \operatorname{Im} i$.

(Christophe Hohlweg) PK-4230
E-mail address: `hohlweg.christophe@uqam.ca`