FEUILLE D'EXERCICES 5, MAT3250–ALGÈBRE LINÉAIRE III AUTOMNE, UQAM

Tout au cours de cette feuille d'exercice $\mathbb{k}$ est un corps.

Exercice 1. Soit $g \in L_{\mathbb{k}}(E, F)$ et $f \in L_{\mathbb{k}}(F, G)$, montrer que ${}^t(f \circ g) = {}^t g \circ {}^t f$. En déduire un monomorphisme de groupes du groupe $GL_{\mathbb{k}}(E)$ dans $GL_{\mathbb{k}}(E^*)$. Montrer que ces groupes sont isomorphes si E est de dimension finie.

Exercice 2. Soit $A \subseteq E$, $B \subseteq F$ et $f \in L_{\mathbb{k}}(E, F)$. Montrer que $(f(A)^\circ) = ({}^t f)^{-1}(A^\circ)$ et que $f(A) \subseteq B \implies {}^t f(B^\circ) \subseteq A^\circ$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = M_n(\mathbb{k})$ et soit $u : \mathbb{k} \to E$ l'application définie par $\alpha \mapsto \alpha I_n$. Montrer que la trace $\mathrm{tr} : E \to \mathbb{k}$ et une forme linéaire et calculer ${}^t u(\mathrm{tr})(1)$.

Exercice 4. Soit $D : \mathbb{k}_n[X] \to \mathbb{k}_{n-1}[X]$ la fonction dérivée.

(a) Détareminer la matrice de ${}^t D$ dans les bases duales des bases (X^i) de $\mathbb{k}_{n-1}[X]$, où $0 \leq i \leq n-1$, et (X^i) de $\mathbb{k}_n[X]$, où $0 \leq i \leq n$.

(b) Soit $\varphi \in (\mathbb{k}_{n-1}[X])^*$ tel que $\varphi(P) = P(0)$. Déterminer la forme linéaire ${}^t D(\varphi) \in (\mathbb{k}_n[X])^*$.

(Christophe Hohlweg) PK-4230
E-mail address: `hohlweg.christophe@uqam.ca`