FEUILLE D'EXERCICES 7,
MAT3250–ALGÈBRE LINÉAIRE III
AUTOMNE, UQAM

Tout au cours de cette feuille d'exercice $\mathbb{k}$ désigne un corps.

Exercice 1. Soit E et F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels. Montrer qu'il existe une application linéaire injective de $E^* \otimes F^*$ dans $(E \otimes F)^*$. Montrer que si la dimension de E et F est finie, alors $E^* \otimes F^* \simeq (E \otimes F)^*$.

Exercice 2. Soit E et F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels.

(a) Montrer qu'il existe une application linéaire injective $\varphi : E^* \otimes F \to L_{\mathbb{k}}(E, F)$ tel que $\varphi(f \otimes y)(u) = f(u)y$ pour tout $f \in E^*$, $y \in F$ et $u \in E$.

(b) Montrer que l'image de φ est le sous-espace vectoriel :

$$\Lambda = \{\alpha \in L_{\mathbb{k}}(E, F) \mid \dim \alpha(E) < \infty\}.$$

(c) Montrer que si E ou F est de dimension finie, alors $E^* \otimes F \simeq L_{\mathbb{k}}(E, F)$.

Exercice 3. Faire les démonstrations des énoncés concernant les produits tensoriels de plusieurs $\mathbb{k}$-espaces vectoriels.

Exercice 4. On considère $\mathbb{H}$ le corps des quaternions.

(a) Montrer que $\mathbb{H}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4.

(b) Montrer que son complexifié $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à $M_2(\mathbb{C})$. Donner un isomorphisme explicite.

(c) Montrer que $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ est isomorphe à $M_4(\mathbb{R})$. Donner un isomorphisme explicite.

(Christophe Hohlweg) PK-4230
E-mail address: `hohlweg.christophe@uqam.ca`