FEUILLE D'EXERCICES 8,
MAT3250–ALGÈBRE LINÉAIRE III
AUTOMNE, UQAM

Tout au cours de cette feuille d'exercice $\mathbb{k}$ désigne un corps.

Exercice 1. Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathbb{k}$-espaces vectoriels et F un $\mathbb{k}$-espaces vectoriels. Montrer que :

$$\left(\bigoplus_{i\in I} E_i\right) \otimes F \simeq \bigoplus_{i\in I}(E_i \otimes F)$$

Exercice 2. Soit E, F et G trois $\mathbb{k}$-espaces vectoriels. Soit $f \in L_{\mathbb{k}}(E, F)$ et $g \in L_{\mathbb{k}}(F, G)$. Montrer que :

(a) $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$.
(b) $T(f)$ est injective si et seulement si f est injective
(c) $T(f)$ est surjective si et seulement si f est surjective.

Exercice 3. Soit $X_1, \dots, X_k$ des variables formelles. Montrer que

$$\mathbb{k}[X_1, \dots, X_k] \simeq \mathbb{k}[X_1] \otimes \cdots \otimes \mathbb{k}[X_k].$$

Exercice 3 (Algèbre symétrique). Soit E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel. On note I l'idéal (bilatère) de $T(E)$ engendré par les éléments $u \otimes v - v \otimes u$. On note $S(E) = T(E)/I$ l'algèbre quotient qui est appelé *l'algèbre symétrique sur* E. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = I \cap E^{\otimes n}$ et $S^n(E) = E^{\otimes n}/I_n$.

(a) Montrer que $S^0(E) \simeq \mathbb{k}$ et $S^1(E) \simeq E$.
(b) Montrer que $S(E)$ est une algèbre commutative pour le produit quotient du produit tensoriel (on notera uv la classe de $u \otimes v$).
(c) Montrer que $S(E) \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S^n(E)$, donc $S(E)$ est une algèbre commutative graduée.
(d) Soit $f \in L_{\mathbb{k}}(E, A)$ où A est une algèbre commutative sur $\mathbb{k}$. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'algèbre $\bar{f} : S(E) \to A$ tel que $\bar{f}(u_1 \dots u_n) = f(u_1) \dots f(u_n)$ pour tout $u_i \in E$.
(e) Montrer que $S(\mathbb{k}) \simeq \mathbb{k}[X]$.
(f) Montrer que $S(E_1 \oplus \cdots \oplus E_k) \simeq S(E_1) \otimes \cdots \otimes S(E_k)$ pour tout collection de $\mathbb{k}$-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_k$.
(g) Montrer que $S(\mathbb{k}^N) \simeq \mathbb{k}[X_1, \dots, X_N]$ (on pourra se servir de l'exercice précédent).

Exercice 4. Soit E, F et G trois $\mathbb{k}$-espaces vectoriels (la caractéristique de $\mathbb{k}$ est différente de 2). Soit $f \in L_{\mathbb{k}}(E, F)$ et $g \in L_{\mathbb{k}}(F, G)$.

(a) Montrer qu'il existe un morphisme d'algèbre $\bar{f} : T(E) \to \Lambda(F)$ tel que $\bar{f}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = f(u_1) \wedge \cdots \wedge f(u_n)$.
(b) En déduire qu'il existe un unique morphisme d'algèbre $\Lambda(f); \Lambda(E) \to \Lambda(F)$ tel que $\Lambda(f)(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n) = f(u_1) \wedge \cdots \wedge f(u_n)$.
(c) Montrer que $\Lambda(g \circ f) = \Lambda(g) \circ \Lambda(f)$.
(d) Montrer que $\Lambda(f)$ est injective si et seulement si f est injective
(e) $\Lambda(f)$ est surjective si et seulement si f est surjective.

(Christophe Hohlweg) PK-4230
E-mail address: hohlweg.christophe@uqam.ca