EXAMEN FINAL (20PT + 5 PT BONUS)
MAT3250–ALGÈBRE LINÉAIRE III
AUTOMNE 2017, UQAM
LE 13 DÉCEMBRE 2017 DE 14H À 17H00

VEUILLEZ LIRE ATTENTIVEMENT CE QUI SUIT :

• **Consignes :** Vous n'avez le droit à aucun **document** (notes de cours, livres, etc.) ou **appareil** ÉLECTRONIQUE (ordinateur et assimilé, téléphone, calculatrice, tablettes etc.);

• **Critères d'évaluations :** Respect des consignes ; Clarté de la rédaction, de la présentation et exactitude du raisonnement amenant à la solution (comprend l'exactitude des calculs) ; Qualité du français écrit, bon usage du langage et des symboles mathématiques.

Justifier bien toutes vos réponses à partir du matériel vu en cours. Il y a 5 points en bonus à l'examen.

Tout au long de cet examen, $\mathbb{k}$ désigne un corps de caractéristique différente de 2.

Exercice 1 (3+2=5pt). Soit E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel. On considère les sous-espaces vectoriels de $E^{\otimes 2}$ suivants :

$$I_2 = \mathrm{vect}(x \otimes y - y \otimes x \mid x, y \in E) \quad \text{et} \quad J_2 = \mathrm{vect}(x \otimes y + y \otimes x \mid x, y \in E).$$

(a) Montrer que $E^{\otimes 2} = I_2 \bigoplus J_2$ (on pourrait déterminer une base de chacun).
(b) En déduire que $E^{\otimes 2} \simeq \Lambda^2(E) \bigoplus S^2(E)$ en tant qu'espaces vectoriels.

Exercice 2 (3+2+1=6pt). Soit E et F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels.

(a) Montrer qu'il existe une unique une application linéaire injective $\varphi : E^* \otimes F \to L_{\mathbb{k}}(E, F)$ tel que $\varphi(f \otimes y)(u) = f(u)y$ pour tout $f \in E^*$, $y \in F$ et $u \in E$.
(b) Montrer que l'image de φ est le sous-espace vectoriel :

$$\Lambda = \{\alpha \in L_{\mathbb{k}}(E, F) \mid \dim \alpha(E) < \infty\}.$$

(c) Montrer que si E ou F est de dimension finie, alors $E^* \otimes F \simeq L_{\mathbb{k}}(E, F)$.

Exercice 3. Soit E et F deux $\mathbb{k}$-espace vectoriel. Si $B : E \times F \to \mathbb{k}$ est une forme bilinéaire sur $E \times F$, le *radical à droite (rep. à gauche) de* B est l'ensemble

$$E^{\perp} = \{u \in E \mid B(u, v) = 0,\ \forall v \in F\} \quad (\text{resp.} \quad F^{\perp} = \{v \in F \mid B(u, v) = 0,\ \forall u \in E\}).$$

On dit que B est non-dégénérée à gauche (resp. à droite) si $E^{\perp} = \{0\}$ (resp. $F^{\perp} = \{0\}$). Elle est non-dégénérée si elle est non-dégénérée à gauche et à droite. Si $u \in E$, on note $B(u, \cdot) \in F^*$ la forme linéaire sur F définie par $v \mapsto B(u, v)$ et si $v \in F$, on note $B(\cdot, v) \in E^*$ la forme linéaire sur E définie par $u \mapsto B(u, v)$. On considère les applications $B_E : E \to F^*$, définie par $B_E(u) = B(u, \cdot)$ pour tout $u \in E$, et $B_F : F \to E^*$, définie par $B_F(v) = B(\cdot, v)$ pour tout $v \in F$.

Partie A (3+2=5pt) Soit $B : E \times F \to \mathbb{k}$ est une forme bilinéaire sur $E \times F$.

(a) Montrer que : $B_E \in L_{\mathbb{k}}(E, F^*)$, $\ker B_E = E^{\perp}$ et $\mathrm{Im}\, B_E \subseteq (F^{\perp})^{\circ}$. En déduire que le quotient $E/E^{\perp}$ est isomorphe à un sous-espace-vectoriel de $(F^{\perp})^{\circ}$.
(b) Montrer que, si B est non-dégénérée à droite et si $\dim E = \dim F$ est finie, alors B est non dégénérée et B_E est un isomorphisme (naturelle) entre E et F^*.

Partie B (2+2+2+3=9pt) Soit $n \geq 1$ un entier, on considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} b : (E^*)^n \times E^n & \longrightarrow & \mathbb{k} \\ \big((f_i)_i, (x_j)_j\big) & \longmapsto & \det\big(f_i(x_j)\big)_{i,j}, \end{array}$$

où $(x_i)_i$ désigne la liste d'éléments $(x_1 \ldots, x_n)$ et $\big(f_i(x_j)\big)_{i,j}$ désigne la matrice de coefficients $f_i(x_j)$ avec $1 \leq i \leq n$ lignes et $1 \leq j \leq n$ colonnes.

(a) Montrer que, pour tout $(f_i)_i \in (E^*)^n$, l'application $b_1 : (x_j)_j \mapsto b((f_i)_i, (x_j)_j)$ est une forme n-linéaire alternée sur E^n.

(b) En déduire qu'il existe une unique application $\tilde{b}_1 : (E^*)^n \times \Lambda^n(E) \to \mathbb{k}$ tel que

$$b_1((f_i)_i, x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = \det\big(f_i(x_j)\big)_{i,j}.$$

(c) Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire $\tilde{b} : \Lambda^n(E^*) \times \Lambda^n(E) \to \mathbb{k}$ tel que

$$\tilde{b}(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n, x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = \det\big(f_i(x_j)\big)_{i,j}.$$

(d) On suppose E de dimension finie. Montrer que $\Lambda^n(E^*) \simeq \big(\Lambda^n(E)\big)^*$ en tant qu'espaces vectoriels.

(Christophe Hohlweg) PK-4230
E-mail address: `hohlweg.christophe@uqam.ca`