FEUILLE D'EXERCICES 1, MAT3250–ALGÈBRE LINÉAIRE III AUTOMNE, UQAM

Tout au cours de cette feuille d'exercice $\mathbb{k}$ est un corps.

Exercice 1. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites $(u_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ à termes réels et $a \in \mathbb{R}^*$. Soit

$$F = \{(u_n) \in E \,|\, u_{n+1} = au_n,\, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Montrer que F est une droite de E dont on donnera un vecteur directeur.

Exercice 2. Soit $M_{n,m}(\mathbb{k})$ l'ensemble des matrices $n \times m$ à coefficient dans $\mathbb{k}$ munit de l'addition des matrices et de la multiplication par les scalaires dans $\mathbb{k}$. On pose $E = M_{n,n}(\mathbb{k})$ et $A = GL_n(\mathbb{k})$ l'ensemble des matrices carrés inversibles. Est-ce que A est un sous-espace vectoriel de E (justifier)? Si non, montrer que $\mathrm{vect}(A) = E$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer qu'il existe un supplémentaire à F dans E, c'est-à-dire, il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que :

$$F \cap G = \{0\} \quad \text{et} \quad E = F + G \quad (F + G = \{u + v \mid u \in F,\ v \in G\}).$$

Exercice 4.

(i) Montrer que toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension infini ont même cardinal.

(ii) Montrer que l'espace vectoriel $\mathbb{k}[X]$ est un espace vectoriel de dimension infinie, en donner une base et spécifier si elle est ou non dénombrable.

(iii) Montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admet une base de cardinal non dénombrable.

(Christophe Hohlweg) PK-4230
E-mail address: `hohlweg.christophe@uqam.ca`