DEVOIR (20PT)
MAT2250–THÉORIE DES GROUPES
AUTOMNE, UQAM
À REMETTRE LE 3 DÉCEMBRE 2018

VEUILLEZ LIRE ATTENTIVEMENT CE QUI SUIT :

- **Consignes :**
  - Ce devoir, de 6 pages au maximum (sans compter la page de présentation obligatoire), devra être rédigé[1] sur du papier format lettre ligné et broché.
  - ATTENTION à ne pas plagier la copie de ceux avec qui vous rechercheriez la solution de ce problème ou des textes lus. Voir le règlement sur le PLAGIAT à l'UQAM à la fin du plan de cours
  - **AUCUN DEVOIR DE LA QUALITÉ D'UN BROUILLON NE SERA ACCEPTÉ.**

- **Critères d'évaluations des devoirs :** Respect des consignes; Clarté de la rédaction, de la présentation et exactitude du raisonnement amenant à la solution (comprend l'exactitude des calculs); Qualité du français (ou anglais) écrit, bon usage du langage et des symboles mathématiques.

- **Échéance :** À remettre en version papier au plus tard le 3 décembre 2018 à 9h en classe. *Chaque jour de retard entraîne une pénalité de 10%. Par exemple, une journée de retard sur un devoir noté sur 20 équivaut à un retrait de 2 points de la note finale du devoir.*

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{Q}^*$, on pose $f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ l'application définie par

$$f_a(x) = ax.$$

(1) Montrer que f_a est un automorphisme du *groupe additif* $\mathbb{Q}$.
(2) Montrer que l'application suivante est un isomorphisme de groupes :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{Q}^* & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}) \\ a & \longmapsto & f_a \end{array}$$

Exercice 2. *(Lemme de Zassenhaus)* Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe G et soit $H' \lhd H$ et $K' \lhd K$.

(1) Montrer que $H'(H \cap K')$ est un sous-groupe normal de $H'(H \cap K)$.
(2) Montrer que $K'(H' \cap K)$ est un sous-groupe normal de $K'(H \cap K)$.
(3) Montrer que l'on a un isomorphise de groupes quotients:

$$H'(H \cap K) \Big/ H'(H \cap K') \cong K'(H \cap K) \Big/ K'(H' \cap K)$$

[1]Vous pouvez aussi rédiger ce devoir sous LaTEX (voir détails sur la page internet du cours) ou sous tout autre traitement de texte, et l'imprimer sur feuille blanche avec des caractères de taille 12pt, des marges d'au moins 1,5cm de tous les cotés et en format 1.5 interlignes

Exercice 3. Soit $m \geq 2$. Soit G un groupe fini engendré par deux involutions distinctes x et y tel que l'ordre de xy est m. On rappelle que $\mathcal{D}_m = \langle a, b \mid a^2 = b^m = abab = e \rangle$.

(1) Montrer que 2 divise $|G|$ et que $|G| = 2m$.
(2) Montrer que $\mathcal{D}_m = \langle s, t \mid s^2 = t^2 = (st)^m = e \rangle$.
(3) Montrer que $G \simeq \mathcal{D}_m$.
(4) Qu'en est-il si l'ordre de x est infini?

Exercice 4. Soient G et H deux groupes et soit $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, \mathrm{Aut}(H))$ un morphisme de groupes de G dans le groupe des automorphismes sur H. On notera φ_g l'image de $g \in G$ par φ. On munit l'ensemble $H \times G$ de la loi de composition interne: $(h, g)(h', g') = (h\varphi_g(h'), gg')$.

(a) Montrer que $H \times G$ munit de cette loi est un groupe. Ce groupe sera noté $H \rtimes_\varphi G$ et est appelé *produit semi-direct de H par G (relativement à φ)*.
(b) Déterminer φ pour que $H \rtimes_\varphi G$ soit le produit direct $H \times G$ en tant que groupe.
(c) Soit H, K deux sous-groupes de G tel que $H \cap K = \{e\}$ et $H \lhd G$. Déterminer φ pour que $H \rtimes_\varphi K$ soit le produit semi-direct interne $H \rtimes K$ en tant que groupe
(d) Soit $m \geq 3$. Montrer que $\mathcal{D}_m \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où $\varphi_{1+2\mathbb{Z}}(1 + m\mathbb{Z}) = m - 1 + m\mathbb{Z}$.

(Christophe Hohlweg) PK-4230
E-mail address: hohlweg.christophe@uqam.ca