

Devoir 1 . À rendre le 13 octobre 2021 en classe

- Relire les consignes dans le plan de cours -

Consignes propre à ce devoir :

- Commencer par une page de garde
- Nombre de pages maximal (excluant la page de garde) : 2

Exercice 1 . Soit G un groupe et $a, b \in G$ distincts tel que $\text{ord}(a) = \text{ord}(b) = 2$ et $G = \langle a, b \rangle$. Montrer que :

a) $G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = e \rangle$ si $\text{ord}(ab) = \infty$.

b) $G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^m = e \rangle$ si $\text{ord}(ab) = m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Exercice 2 . On considère le groupe diédral $\mathcal{D}_6 = \langle s, t \mid s^2 = t^2 = (st)^6 = e \rangle$.

a) Montrer que $\mathcal{D}_6 \cong \mathcal{D}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où \mathcal{D}_3 est le groupe diédral d'ordre 6

(indication : considérer le produit direct des sous-groupes

$$H = \langle e, sts \rangle \text{ et } K = \langle (st)^3 \rangle$$

b) Soit $W = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = (s_1 s_2)^3 = (s_1 s_3)^2 = (s_2 s_3)^2 = e \rangle$

Montrer que $H' = \langle s_1, s_2 \rangle$ et $K' = \langle s_3 \rangle$ sont des sous-groupes normaux de W .

c) Montrer que $W \cong \mathcal{D}_6$.

