Devoir 1 - MAT3500 groupes de Coxeter.

À rendre le lundi 6 octobre en classe

ou par courriel en PDF avant 13h30.

CONSIGNES et CRITÈRES D'ÉVALUATION.

- Voir les consignes de rédaction sur la page internet du cours.
- Ce devoir devra être rédigé sur 2 pages (ou moins) au maximum.
- La clarté de la rédaction, de la présentation et l'exactitude du raisonnement amenant à la solution est le critère principal d'évaluation.

PROBLÈME. Le groupe symétrique comme groupe de Coxeter.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on considère le système de Coxeter (G_m, S_m) de type $\underset{a_1}{\bullet}\!-\!\!-\!\underset{a_2}{\bullet}\!-\!\!-\cdots-\!\!-\underset{a_{m-1}}{\bullet}\!-\!\!-\!\underset{a_m}{\bullet}$ où $S_m = \{a_1, \dots, a_m\}$.

On rappelle que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{m+1}$, l'ensemble des bijections sur l'ensemble $[\![m+1]\!] := \{1, 2, \dots, m, m+1\}$, est engendré par les transpositions simples $\tau_i = (i\ i{+}1)$, où $1 \leq i \leq m$.

(a) On considère le sous-groupe $H_{m-1} = \langle a_1, \dots, a_{m-1} \rangle \leq G_m$.

Montrer qu'il existe un morphisme de groupes surjectif

$$\psi : G_{m-1} \longrightarrow H_{m-1}.$$

(b) Posons $y_0, y_1, \dots, y_m$ les éléments suivants :

$$y_0 = e,\quad y_1 = a_m,\quad y_2 = a_{m-1}a_m,\quad y_i = a_{m+1-i}\cdots a_m \quad (1 \leq i \leq m)$$

Montrer que

$$G_m = \bigcup_{i=0}^{m} y_i H_{m-1}.$$

(d) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $|G_n| \leq (n+1)!$

(e) Montrer qu'il existe un unique isomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} \varphi : G_m &\xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}_{m+1} \\ a_i &\longmapsto \tau_i \end{aligned}$$

De ce fait, $(\mathfrak{S}_{m+1}, \{\tau_1, \dots, \tau_m\})$ est un système de Coxeter de type $\bullet\!-\!\!\!-\!\bullet\!-\!\!\!-\ \cdots\ -\!\!\!-\!\bullet\!-\!\!\!-\!\bullet$