Devoir 2 - MAT3500 Groupes de Coxeter.

À rendre le lundi 10 novembre en classe

ou par courriel en PDF avant 13h30.

CONSIGNES et CRITÈRES D'ÉVALUATION.

- Voir les consignes de rédaction sur la page internet du cours.
- Ce devoir devra être rédigé sur 3 pages (ou moins) au maximum. Une page de garde (i.e. de présentation) ne compte pas dans ce nombre de pages.
- La clarté de la rédaction, de la présentation et l'exactitude du raisonnement amenant à la solution est le critère principal d'évaluation.

Problème. Soit (W,S) un système de Coxeter. On note $T = \bigcup_{w \in W} wSw^{-1}$ son ensemble de réflexions et pour $w \in W$, $T(w) = \{t \in T \mid \ell(tw) < \ell(w)\}$ l'ensemble d'inversions de w.

Partie A. Soit $w \in W$ et $I = D_R(w) = \{s \in S \mid \ell(ws) < \ell(w)\}$.

(a) Soit $J \subseteq I$. Montrer que W_J est fini et que

$w = u w_{0,J}$ où $u \in X_J = \{x \in W \mid \ell(xs) > \ell(x) \ \forall s \in J\}$

et $w_{0,J}$ est l'élément le plus long dans W_J.

(b) Soit $s, t \in I$ distincts, en déduire que $m_{st} \neq \infty$ et qu'il existe $x \in W$ tel que $w = x[st]_{m_{st}}$ est un produit réduit.

Partie B. Soit $t \in T$ et $t = s_1 \dots s_p$ un mot réduit pour t.

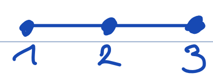
(a) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k+1$.

(b) On pose $u = s_1 \dots s_{k+1}$. Montrer que $t \in T(u)$.

(c) Montrer que $t = s_1 \dots s_k s_{k+1} s_k \dots s_1$ et que ce mot est réduit.

(d) Montrer que $D_R(u) = \{s_{k+1}\}$.

(e) Soit $v \in W$ tel que $D_R(v) = \{s\}$. On pose $g = vs$.
Est-il vrai que vsv^{-1} est un produit réduit (i.e. $\ell(vsv^{-1}) = 2\ell(v) + 1$) ?

Indication : on pourra chercher un contre-exemple dans (W, S) de type 

.