Devoir 3 - MAT3500 Groupes de Coxeter.

À rendre le mardi 25 novembre 2025 en classe

ou par courriel en PDF avant 13h30.

CONSIGNES et CRITÈRES D'ÉVALUATION.

- Voir les consignes de rédaction sur la page internet du cours.
- Ce devoir devra être rédigé sur 4 pages (ou moins) au maximum.
  Une page de garde (i.e. de présentation) ne compte pas dans ce nombre de pages.
- La clarté de la rédaction, de la présentation et l'exactitude du raisonnement amenant à la solution est le critère principal d'évaluation.

Exercice 1 Soit (W,S) un système de Coxeter avec l'ordre faible à droite $(W, \leq_R)$.

On considère
$$d : W \times W \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(u,v) \longmapsto d(u,v) := \ell(u^{-1}v)$$

On sait que d est une distance sur W.

(a) Soit $u, v \in W$, montrer que $d(u,v) = |T(u) + T(v)|$

(on rappelle que $T(gh) = T(g) + g\,T(h)\,g^{-1}$ pour $g, h \in W$)

(b) Soit $w \in W$ et $[e,w]_R = \{u \in W \mid u \leq_R w\}$.

Montrer que $d(u,v) \leq \ell(w)$, pour tout $u, v \in [e,w]_R$.

~ suite au verso ~

(c) Montrer que pour tout $u, v \in [e, w]_R$ on a :

$$d(u,v) = \ell(w) \iff T(w) = T(u) \sqcup T(v).$$

Exercice 2. Soit (W,S) un système de Coxeter.

On considère sa représentation géométrique dans $O(V, B)$, avec système simple $\Delta = \{\alpha_s \mid s \in S\}$ et système de racines $\Phi = W(\Delta)$; $\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$.

On dit que $A \subseteq \Phi^+$ est convexe si $\mathrm{cone}(A) \cap \Phi \subseteq A$.

On dit que A est biconvexe si A et $A^c = \Phi^+ \setminus A$ sont biconvexes.

On note $\mathcal{B}_0 = \{ A \subseteq \Phi^+ \mid A \text{ biconvexe et } |A| \text{ fini} \}$.

Montrer que :

(a) Si A est biconvexe alors $A \cap \Delta \neq \emptyset$ ou $A = \emptyset$.

(b) $\mathcal{B}_0 = \{ \Phi(w) \mid w \in W \}$

où $\Phi(w) = \{ \alpha_t \mid t \in T(w) \} = \Phi^+ \cap w(\Phi^-)$

est l'ensemble des Φ-inversions de $w \in W$.

(On pourra procéder par récurrence sur $|A|$, $A \in \mathcal{B}_0$).